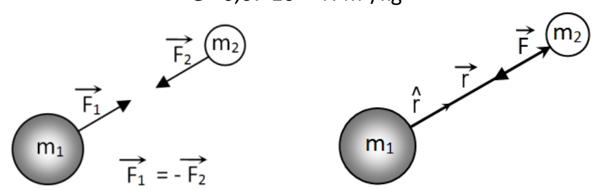
CAMPO GRAVITATORIO

FUERZA DE ATRACCIÓN GRAVITATORIA

$$\boxed{\vec{F} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \hat{r}}$$

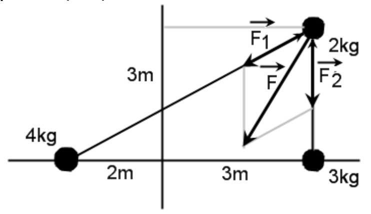
Ley de Gravitación Universal de Sir **Isaac Newton**

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$



IMPORTANTE: Si nos piden la fuerza de atracción sobre m2 el vector $\vec{r}$ empieza en la masa m1 que ejerce la atracción.

Ejercicio. Dos masas de 3 y 4 kg están en los puntos (3,0) y (-2,0) respectivamente. Calcula la fuerza que se ejerce sobre otra masa de 2 kg colocada en el punto (3,3).

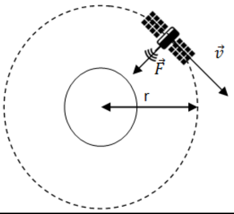


$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

$$\vec{F} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{4 \cdot 2}{\left(\sqrt{5^2+3^2}\right)^2} \cdot \frac{(5\hat{\imath} + 3\hat{\jmath})}{\sqrt{5^2+3^2}} - 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{3 \cdot 2}{3^2} \cdot \frac{3\hat{\jmath}}{3}$$

$$\vec{F} = (-1{,}34 \cdot 10^{-11}\hat{\imath} - 5{,}25 \cdot 10^{-11}\hat{\jmath})\ N$$

VELOCIDAD ORBITAL



$$\boxed{G \cdot \underbrace{\frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}}_{\text{Fuerza centrípeta}}}$$

$\frac{v^2}{r}$: Aceleración centrípeta

Despejando v:

$$\boxed{v = \sqrt{G \cdot \frac{M}{r}}}$$

Velocidad orbital

¡ATENCIÓN! Todo lo que esté en órbita lleva esta velocidad.

$$\boxed{T = \text{Periodo orbital} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} \quad (\text{Tiempo en recorrer } 2 \cdot \pi \cdot r)}$$

Ejercicio: a) ¿A qué velocidad horizontal tendríamos que lanzar una piedra desde la superficie terrestre para conseguir ponerla en órbita; b) Calcula su período orbital (tiempo que tarda en dar una vuelta). Datos: $R_{Tierra} = 6{,}4 \cdot 10^6$ m; $M_{Tierra} = 5{,}91 \cdot 10^{24}$ kg

a)

$$V = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{R_T}}$$

$$V = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{6{,}4 \cdot 10^6}}$$

$$V = 7888\ {}^{m}/_{s}$$

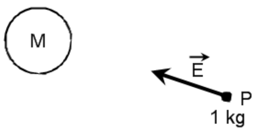
b) Teniendo en cuenta que la piedra recorre una longitud de circunferencia (2·π·R) en ese tiempo:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_{Tierra}}{T}$$

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_{Tierra}}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6{,}4 \cdot 10^6}{7888} = 5097{,}9\ s = 85\ \text{minutos}$$

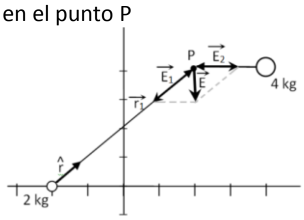
INTENSIDAD DE CAMPO GRAVITATORIO, $\vec{E}$, EN UN PUNTO "P"

Intensidad de campo, $\vec{E}$, creado por una masa "M" en un punto: Es la fuerza ejercida por M sobre un imaginario kilogramo, 1kg, situado en ese punto, P.



$$\boxed{\vec{E} = -G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \hat{r} \quad (N/kg)} \qquad \boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{E}}$$

Ejemplo: Calcula la intensidad de campo gravitatorio ejercida por dos masas de 4 kg y 2 kg en el punto P



Aplicamos el Principio de superposición:

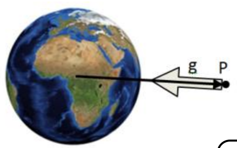
$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$$

$$\vec{E} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2}{\left(\sqrt{4^2+4^2}\right)^2} \cdot \frac{(4\hat{\imath} + 4\hat{\jmath})}{\sqrt{4^2+4^2}} + \left(-6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{4}{2^2} \cdot \frac{(-2\hat{\imath})}{2}\right)$$

$$\vec{E} = (6{,}38 \cdot 10^{-11}\hat{\imath} - 2{,}95 \cdot 10^{-12}\hat{\jmath}\,)\ N/kg$$

GRAVEDAD, $\vec{g}$

Cuando hablamos de planetas hablamos de GRAVEDAD, g, en lugar de hablar de intensidad del campo, $\vec{E}$. Significan lo mismo. Para trabajar con "g" normalmente no se utilizan vectores ni el signo (-)-



$$\boxed{g = G \cdot \frac{M_{Tierra}}{r^2}} \quad \text{O también:} \quad \boxed{g = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2}}$$

En la superficie de un planeta, como por ejemplo, la Tierra, el valor de "g" será:

$$\boxed{g_o = G \cdot \frac{M_{Tierra}}{{R_T}^2} = 9{,}81\ N/kg \text{ o bien } 9{,}81\ m/s^2}$$

Ejercicio: Calcula el peso de un muchacho de 63 kg de masa en la superficie de la Tierra y en la termosfera, a 150 km de altura. Datos: R_T= 6371 km; g_o=9,8 m/s²

Teniendo en cuenta que:

$$P = m \cdot g$$

En la superficie de la Tierra: P= m · g_o = 63 · 9,8 = 617,4 N

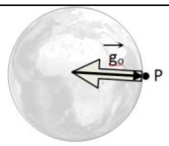
En la termosfera pesará: P = m·g

$$g = \frac{{R_T}^2}{(R_T + h)^2} \cdot g_o$$

$$P = 63 \cdot \frac{6371000^2}{(6371000 + 150000)^2} \cdot 9{,}8$$

P= 589,3 N

CAMPO GRAVITATORIO



Una expresión muy utilizada es:

$$\boxed{\frac{g}{g_o} = \frac{{R_T}^2}{(R_T + h)^2}}$$

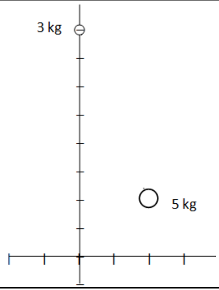
POTENCIAL, V, EN UN PUNTO "P"

Potencial en un punto: Trabajo externo necesario para llevar 1 kg desde el infinito a un punto P.

$$\boxed{V = -G \cdot \frac{M}{r}} \qquad (J/kg)$$

Sólo podemos utilizar el concepto de potencial en campos conservativos como el gravitatorio.

Ejemplo: Dos masas de 5 y 3 kg están situadas en los puntos (2,2) y (0,8) respectivamente. Calcula el potencial en el origen de coordenadas.



$$V = V_1 + V_2$$
$$V = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5}{\sqrt{2^2 + 2^2}} - 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{3}{8}$$
$$V = -1{,}43 \cdot 10^{-10} \text{ Julios/kg}$$

Ep, ENERGÍA POTENCIAL DE UNA MASA "m"

Trabajo externo necesario para llevar una masa "m" desde el infinito al punto donde se encuentra.

$$Ep = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$
$$Ep = m \cdot V$$
$$Ep_{final} - Ep_{inicial} = q \cdot (V_{final} - V_{inicial}) \rightarrow \Delta Ep = q \cdot \Delta V$$

Ejercicio: Calcula la Ep de un cuerpo de 2 kg en el origen de coordenadas anterior.

$$Ep = Ep_1 + Ep_2 = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5 \cdot 2}{\sqrt{2^2 + 2^2}} - 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{3 \cdot 2}{8}$$
$$= -5{,}22 \cdot 10^{-10} \text{ Julios}$$

Ese es el trabajo que nos costaría a nosotros o a un motor trasladar a esa masa de 2 kg desde el infinito hasta el origen de coordenadas.

El campo (fuerza gravitatoria) realizaría un trabajo de $-5{,}22 \cdot 10^{-10}$ J

PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

$$\boxed{W_{TOTAL} = W_{Fuerzas\ Conservativas} + W_{Fuerzas\ NO\ Conservativas}}$$

$$W_{TOTAL} = \Delta Ec$$
$$W_{Fuerzas\ Conservativas} = -\Delta Ep$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\Delta Ec = -\Delta Ep + W_{FNC}}$$

Cuando dicen "calcula el trabajo que se debe realizar" están pidiendo el trabajo de mi mano, un motor, etc que son fuerzas no conservativas.

Trabajo realizado por el campo= $W_{FC} = -\Delta Ep$

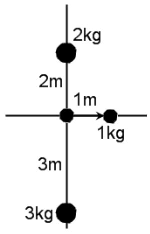
El valor de W_{FC} es independiente de la trayectoria seguida, solo depende de la posición inicial ($Ep_{inicial}$) y final (Ep_{final})

Ejercicio: Dos masas puntuales m1 = 2 kg y m2 = 3 kg se encuentran situadas respectivamente en los puntos (0,2) m y (0,-3) m.

a) Calcula el trabajo necesario para trasladar una masa m3 = 1 kg desde el punto (0,0) m al punto (1,0) m.

b) Calcula el trabajo realizado por el campo gravitatorio.

G= 6,67 10^{-11} N m^2 kg^{-2}



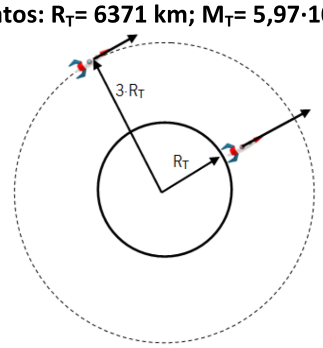
$$\Delta Ec = -\Delta Ep + W_{FNC}$$
$$0 = -\Delta Ep + W_{FNC}; \quad W_{FNC} = \Delta Ep$$
$$W_{FNC} = \left(-6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 1^2}} - 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{3 \cdot 1}{\sqrt{3^2 + 1^2}}\right) - \left(-6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2} - 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{3 \cdot 1}{3}\right)$$

$$W_{Fuerza\ necesaria.} = +1{,}05 \cdot 10^{-11} \text{ Julios}$$

b) $W_{FC} = -\Delta Ep = -1{,}05 \cdot 10^{-11}$ Julios

Ejercicio: Se quiere poner en órbita un satélite de telecomunicaciones a una altura doble del radio terrestre. Calcula: a) la velocidad de lanzamiento; b) la energía total del mismo una vez esté en órbita.

Datos: R_T= 6371 km; M_T= 5,97·10^{24} kg; m= 100 kg.



a) Aplicamos el PCE:

$$\Delta Ec = -\Delta Ep + W_{FNC}$$

La posición inicial del cohete será sobre la superficie de la Tierra donde tendrá una energía cinética debida a la velocidad de lanzamiento y una energía potencial debida a la posición que tiene.

La posición final del satélite será la que tiene cuando está orbitando alrededor de la Tierra. Aquí poseerá una Ec y una Ep debida a su posición.

Aquí no existen fuerzas no conservativas.

Entonces:

$$Ec_{final} - Ec_{inicial} = -(Ep_{final} - Ep_{inicial}) + 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot \left(\sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{3 \cdot 6371 \cdot 10^3}}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot v^2 = -\left(-6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot 100}{3 \cdot 6371 \cdot 10^3} - \left(-6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot 100}{6371 \cdot 10^3}\right)\right)$$

v= 10206 m·s^{-1}

b) La energía total (**ENERGÍA MECÁNICA**) del satélite será la suma de su Ec y su Ep: $E_{Mecánica} = Ec + Ep$

CAMPO GRAVITATORIO

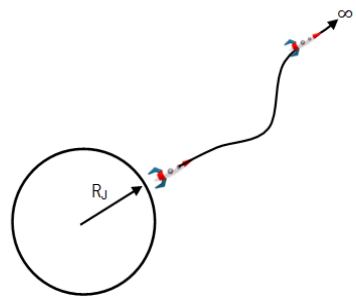
$$\mathbf{E_{Mecánica}} = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 10206^2 + \left(-6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot 100}{3 \cdot 6371 \cdot 10^3} \right)$$

$$E_{Mecánica} = 3{,}12 \cdot 10^9 \text{ Julios}$$

Ejercicio: Calcula la <u>VELOCIDAD DE ESCAPE</u> de un satélite de 100 kg en la superficie de Júpiter. Datos: $M_{Júpiter}$= $1{,}90 \cdot 10^{27}$ kg; $R_{Júpiter}$= 69911 km

¡IMPORTANTE! La velocidad de escape es la velocidad con la que debemos lanzar un objeto para que llegue al infinito, fuera de la acción gravitacional de la Tierra.

$$\boxed{\text{Velocidad de escape} = \sqrt{2 \cdot G \cdot \frac{M}{r}}}$$



Pero se puede deducir con el Principio de Conservación de la Energía.

En el infinito la Ep=0 (sería el trabajo externo para llevar al satélite desde el infinito al infinito, o sea, cero) y la Ec=0 ya que llegaría con velocidad cero (¿para qué iba a llegar con más velocidad?)
Aplicando el PCE:

$$\Delta Ec = -\Delta Ep + W_{FNC}$$

No hay FNC, luego W_{FNC}=0.

$$Ec_{final} - Ec_{inicial} = -\left(Ep_{final} - Ep_{inicial}\right) + 0$$

$$0 - \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot v^2 = -(0 - \left(-6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1{,}90 \cdot 10^{27} \cdot 100}{69911 \cdot 10^3} \right)$$

Despejando v nos quedaría:

v= 60212 m/s

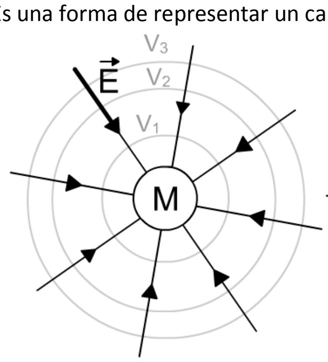
Ejercicio: Un satélite de masa $2 \cdot 10^3$ kg describe una órbita circular de 5500 km en torno a la Tierra. Calcule: (i) La velocidad orbital; (ii) la velocidad con que llegaría a la superficie terrestre si se dejara caer desde esa altura con velocidad inicial nula.
G = $6{,}67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; M_T = $5{,}98 \times 10^{24}$ kg; R_T = 6370 km. Sol: (i) v=Raiz(G·M/r); v=5797 m/s; (ii)ΔEc=-ΔEp; $1/2mv^2$-0=-(-GM·m/R_T-(-GMm/(R_T+h))); v=7618 m/s

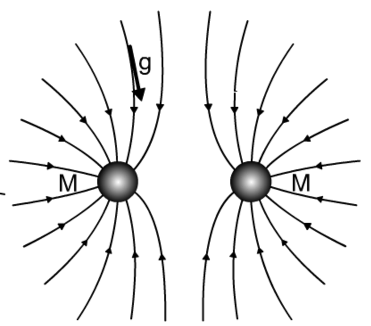
Ejercicio: a) Dos partículas, de masas m y 2m, se encuentran situadas en dos puntos del espacio separados una distancia d. ¿Es nulo el campo gravitatorio en algún punto cercano a las dos masas? ¿Y el potencial gravitatorio? Justifique las respuestas. Sol:E=0 en $x=d/(1+\sqrt{2})$; V=0 en el ∞

Ejercicio: a) Un bloque de acero está situado sobre la superficie terrestre. Indique justificadamente cómo se modificaría el valor de su peso si la masa de la Tierra se redujese a la mitad y se duplicase su radio. Sol: $P_o=m \cdot g_o=m \cdot G \cdot M_T/R_T^2$ luego $P=m \cdot g=m \cdot G \cdot (M_T/2)/(2R_T)^2$ Luego dividir
b) El planeta Mercurio tiene un radio de 2440 km y la aceleración de la gravedad en su superficie es 3,7 m s^{-2}. Calcule la altura máxima que alcanza un objeto que se lanza verticalmente desde la superficie del planeta con una velocidad de 0,5 m s^{-1}. G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} Sol: 3,37cm
Ojo: Este ejercicio también se puede hacer ya que estamos a nivel de superficie con velocidades de lanzamiento pequeñas: $m \cdot g \cdot h = ½ \cdot m \cdot v^2$

LÍNEAS DE CAMPO GRAVITATORIO Y SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

Es una forma de representar un campo gravitatorio ya que no podemos visualizarlo con nuestros ojos.



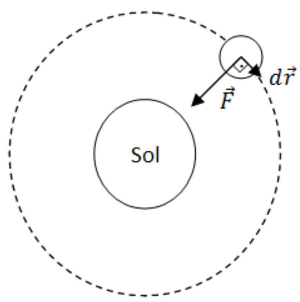


1. En las zonas donde las líneas de campo (representadas por flechas) están próximas $\vec{E}$ es mayor.
2. En cualquier punto de una línea de campo el vector $\vec{E}$ o $\vec{g}$ es tangente a esa línea de campo.
3. Las líneas de campo no se cortan ni se cruzan.
4. Todos los puntos de una superficie equipotencial tienen el mismo potencial, V.
5. Las líneas de campo son normales a las superficies equipotenciales.
6. Si una masa se desplaza de un punto a otro con igual potencial entonces el campo gravitatorio no realiza trabajo alguno ya que:

$$-\Delta Ep = - m \cdot \Delta V = - m \cdot 0 = 0$$

CAMPOS CONSERVATIVOS

El campo gravitatorio es un campo conservativo ya que la fuerza CENTRAL (porque está dirigida hacia la masa que crea el campo) realiza un trabajo que solo depende de las posiciones inicial y final (WFC=-ΔEp) a las que podemos asociar un potencial.
Definir potencial y escribir su formula.
Definir Ep y escribir su fórmula. En el caso de un planeta que gira alrededor del Sol:
Para calcular el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria empleamos la expresión:



$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint F \cdot dr \cdot \cos 90 = 0$$

Escribir Principio de Conservación de la energía.

CAMPO GRAVITATORIO